Fen-Edebiyat Fakültesi	FİNAL SINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz IV	
İmza:	Sınav Tarihi: 31 Mayıs 2017	

Her soru eşit değerdedir. Yalnızca 5 soruyu cevaplayınız. Süre 100dk.

1. $f(x,y,z) = x+2y-2z$ fonksiyonunun $x^2+y^2+z^2 = 25$ küresi üzerindeki maksimum değeri $\boxed{15}$, minimum değeri $\boxed{-15}$ olur.

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-25$

$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow 1 = \lambda 2x, \quad 2 = \lambda 2y, \quad -2 = \lambda 2z, \quad g(x,y,z) = 0$

$\lambda \neq 0$ olur, aksi halde $1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}, \; y = \frac{1}{\lambda}, \; z = -\frac{1}{\lambda}.$

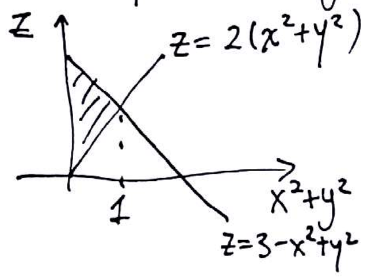
$2x = y = -z, \quad g(x,2x,-2x) = x^2+4x^2+4x^2-25 = 0$

$9x^2 = 25 \Rightarrow x = +\frac{5}{3}, \; y = \frac{10}{3}, \; z = -\frac{10}{3}, \quad f\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{10}{3}\right) = \frac{45}{3} = 15$

$x = -\frac{5}{3}, \; y = -\frac{10}{3}, \; z = \frac{10}{3}, \quad f\left(-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) = -\frac{45}{3} = -15$

2. $z = 3-x^2-y^2$ ve $z = 2x^2+2y^2$ paraboloidleri arasında kalan bölgenin hacmi $\boxed{3\pi/2}$ olur.

$3-x^2-y^2 = 2x^2+2y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$



$$\text{Hacim} = \iint_{x^2+y^2=1} \int_{z=2(x^2+y^2)}^{3-x^2-y^2} 1\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_{z=2r^2}^{3-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(3-3r^2)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3r^2}{2} - \frac{3r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)d\theta = \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

3. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ için (a) $f_x(0,0) = \boxed{0}$ ve $f_y(0,0) = \boxed{0}$ olur (Kısmi türevler yoksa boşluğa YOK yazın). (b) f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında türetilebilirdir: $\boxed{\text{Yanlış}}$ (Doğru, Yanlış). Gösterin.

a) $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = 0.$

b) $$\frac{|f(x,y) - \cancel{f(0,0)} - \cancel{f_x(0,0)x} - \cancel{f_y(0,0)y}|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|\sqrt[3]{xy}|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} \frac{|\sqrt[3]{xy}|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x||\sqrt[3]{k}|}{|x|\sqrt{1+k^2}} = \frac{|\sqrt[3]{k}|}{\sqrt{1+k^2}}$$

Limit k'ya bağlı olduğundan, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\sqrt[3]{xy}|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ limiti yoktur. f türetilemez.

4. $z = x^2 - 2xy + 3y^2 + 8y$ yüzeyinin (a) (a, a, b) noktasındaki teğet düzleminin denklemi $\boxed{(4a+8)(y-a) - (z-b)}$, (b) bu teğet düzlemin xy-düzlemine paralel olması için $a = \boxed{-2}$.

$\vec{n} = (2x-2y)\,i + (-2x+6y+8)\,j - k \Big|_{(x,y,z)=(a,a,b)}$

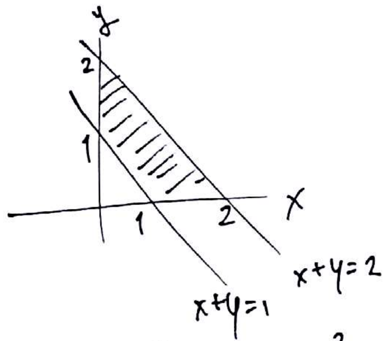
$\vec{n} = (4a+8)\,j - k.$

Teğet düzlem denklemi : $(4a+8)(y-a) - (z-b) = 0$

b) Teğet düzlemin xy-düzlemine paralel olması için normalinin k vektörüne paralel olması gerek.

Yani $4a+8=0$ $\quad a=-2.$

5. B, birinci bölgede $x+y=1$, $x+y=2$ doğruları ve koordinat eksenleri tarafından sınırlanan bölge olsun. $\iint_B \frac{(x-y)^2}{x+y}\,dA = \boxed{7/9}$. (İpucu $u = x+y$, $v = x-y$ dönüşümünü uygulayın)

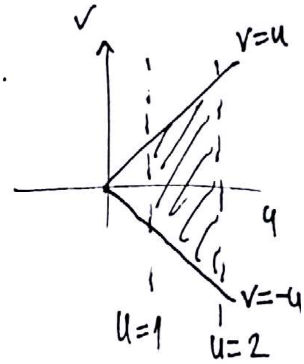


$x+y=1 \Rightarrow u=1$, $x+y=2 \Rightarrow u=2.$

$x=0 \Rightarrow u=y,\ v=-y$, $v=-u$

$y=0 \Rightarrow u=x,\ v=x$, $v=u.$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}.$



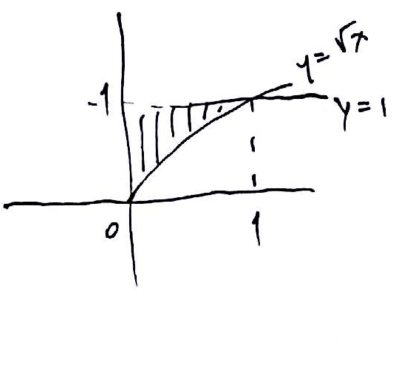
$1 \leq u \leq 2$

$-u \leq v \leq u.$

İntegral $= \int_{u=1}^{2}\int_{v=-u}^{u} \frac{v^2}{u}\left|-\frac{1}{2}\right| dv\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{v^3}{3u}\Big|_{-u}^{u} = \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{2u^3}{u}\,du$

$= \frac{1}{3}\int_1^2 u^2\,du = \frac{u^3}{9}\Big|_1^2 = \frac{7}{9}.$

6. $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx = \boxed{\frac{e-1}{3}.}$ (İpucu: integralin sırasını değiştirin.)



$0 \leq y \leq 1$

$0 \leq x \leq y^2$

$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx\,dy = \int_0^1 e^{y^3} y^2\,dy =$

$y^3 = u \qquad y^2 dy = du/3$

$= \int_0^1 e^u \frac{du}{3} = \frac{e^u}{3}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{3}.$